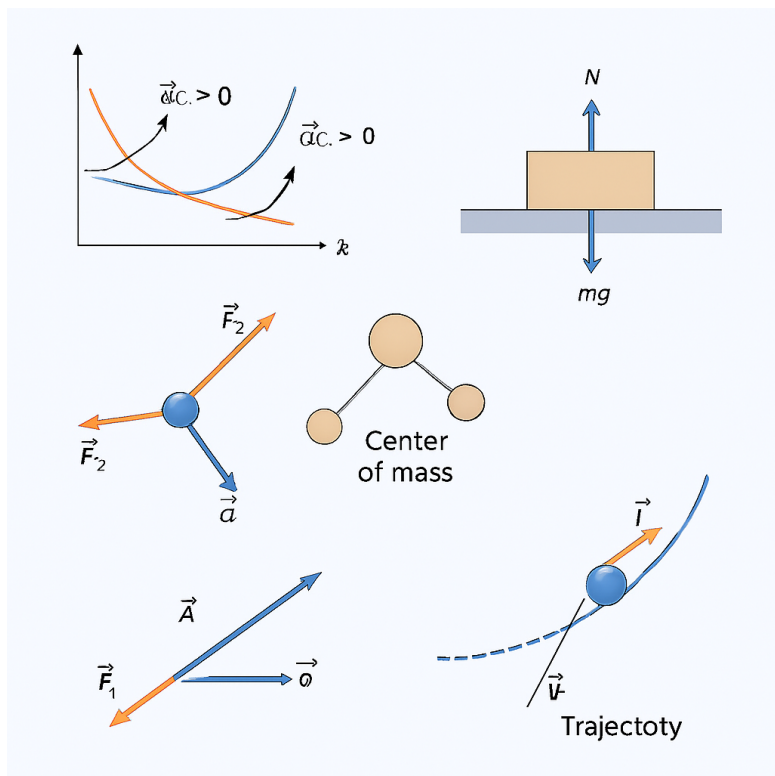




MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL



SOMMAIRE

Chapitre 1 : Cinématique du point matériel.....	6
Repère d'espace, repère de temps.....	6
Correspondance entre les coordonnées sphériques et les coordonnées géographiques.....	8
Trajectoire, vitesse et accélération.....	9
Le mouvement circulaire.....	13
Chapitre 2 : Dynamique du point matériel.....	14
Le principe d'inertie.....	14
Le référentiel galiléen.....	14
Le principe fondamental de la dynamique.....	15
Travail, énergie cinétique et théorème de l'énergie cinétique....	16
Forces conservatives, énergie potentielle et énergie mécanique.	18
Forces non conservatives (ou dissipatives).....	19

CHAPITRE 1 : CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

La cinématique du point matériel a pour objet l'étude des mouvements d'un point matériel (corps de très faible dimension assimilable à un point) sans se préoccuper des causes qui les produisent.

La notion de mouvement étant *relative* (un objet peut être immobile pour un observateur et en mouvement pour un autre observateur) il est nécessaire de l'étudier par rapport à un référentiel donné.

La cinématique classique n'étudie que des mouvements où la vitesse est faible devant celle de la lumière.

I. REPÈRE D'ESPACE - REPÈRE DE TEMPS

I.1 REPÈRE D'ESPACE

Pour résoudre tout problème de mécanique, il est nécessaire de repérer un point M dans l'espace dans le but de déterminer les composantes du vecteur-

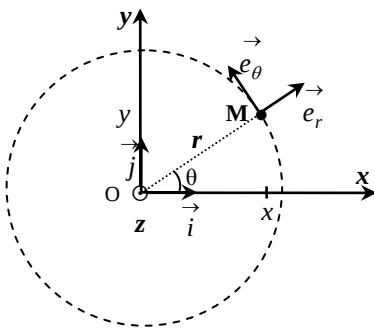
position $\vec{OM}$ et des vecteurs qui pourront être définis à partir de celui-là (la vitesse et l'accélération par exemple).

On choisit donc un *repère d'espace* dans lequel on cherche à déterminer les composantes des vecteurs. Ce choix est orienté par la géométrie du problème.

I.1.1 Repère cartésien

C'est un repère d'espace orthonormé, noté R , d'origine O et de vecteurs de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La position du point M est caractérisée par ses *coordonnées cartésiennes* x, y, z . Le vecteur d'équations $\vec{OM}$ s'écrit alors : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

I.1.2 Repère polaire



Dans le but de simplifier les calculs, il est avantageux de tenir compte de la *symétrie* du problème posé. Ainsi dans le cas par exemple où le point matériel se déplace sur un *cercle* il est intéressant d'utiliser les *coordonnées polaires*. La position du point M est caractérisée par ses *coordonnées polaires* r et θ . La variable r représente la distance entre le point M et le centre O du repère ($r = \|\vec{OM}\|$) alors que l'*angle polaire*

θ (angle orienté de rotation) représente l'angle $\left(\vec{Ox}, \vec{OM}\right)$. La base du repère polaire est : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Le vecteur $\vec{OM}$

s'écrit alors :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r.$$

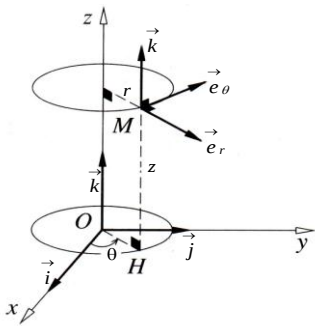
$\vec{e}_r$ = vecteur unitaire dont la direction et le sens sont ceux du vecteur $\vec{OM}$.

$\vec{e}_\theta$ = vecteur unitaire obtenu à partir de $\vec{e}_r$ par rotation de $+\pi/2$ autour de l'axe Oz.

Les coordonnées polaires de M sont donc (r, θ) tel que $r \in [0, +\infty]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. On passe facilement des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes par les relations : $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

I.1.3 Repère cylindrique

De nombreuses distributions physiques (masses, charges...) possèdent une symétrie cylindrique. Dans de tels cas il peut être avantageux, afin de simplifier les calculs, d'utiliser le repère cylindrique : C'est un repère d'espace orthonormé, d'origine O et de vecteurs de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$. La position du point M est caractérisée par ses coordonnées cylindriques r, θ et z . Le vecteur $\vec{OM}$ s'écrit alors :



$$\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = r \vec{e}_r + z \vec{k}$$

- $\vec{e}_\theta$ est le vecteur unitaire obtenu à partir de $\vec{e}_r$ par rotation de $\pi/2$ autour de l'axe Oz.
- $\vec{H}$ est la projection orthogonale de M sur le plan xOy (et $\vec{r} = \vec{OH}$).
- θ est l'angle formé entre $\vec{i}$ et $\vec{e}_r$.

On passe des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z.$$

Remarque

Dans le cas particulier: $z=0$, la représentation cylindrique devient la représentation polaire dans le plan xOy .

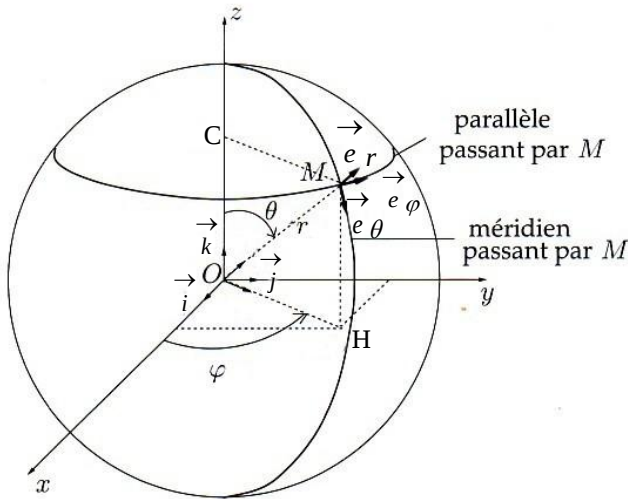
I.1.4 Repère sphérique

Dans le repère sphérique $\mathbf{R}(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, la position du point M est définie par les coordonnées sphériques (r, θ, φ) telles que :

$$\begin{aligned} r &= OM & r &\geq 0 \\ \theta &= (\vec{Oz}, \vec{OM}) & 0 &\leq \theta \leq \pi \\ \varphi &= (\vec{Ox}, \vec{OH}) & 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

On passe des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$x = OH.\cos\varphi = r \sin\theta.\cos\varphi \quad y = OH.\sin\varphi = r \sin\theta.\sin\varphi \quad z = OC = r\cos\theta.$$



I.1.5 Correspondance entre les coordonnées sphériques et les coordonnées géographiques:

Par coordonnées géographiques d'un lieu sur la Terre, on entend un système de trois coordonnées qui sont le plus souvent : la *latitude*, la *longitude* et l'*altitude* (ou l'*élévation*) par rapport au niveau moyen de la mer.

- La **latitude** d'un point est l'angle au centre que forme la normale (verticale) en ce point avec le plan équatorial.

La latitude est une mesure angulaire s'étendant de 0° à l'équateur à 90° aux pôles.

Les points de même latitude constituent un cercle appelé parallèle. Ces cercles sont inscrits dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation de la Terre.

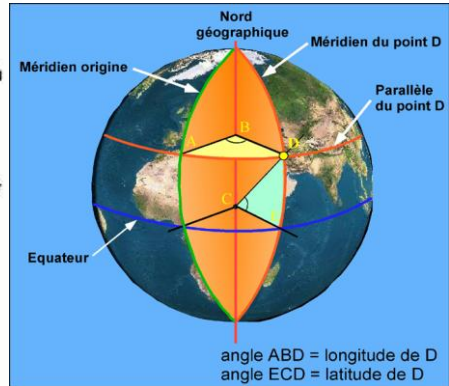
- La **longitude** est une valeur angulaire, expression du positionnement est ou ouest d'un point sur Terre. C'est l'angle au centre que forme le plan passant par ce point et par l'axe de rotation de la terre avec le plan du méridien de *Greenwich*.

Tous les lieux situés à la même longitude forment un demi-plan limité par l'axe des pôles géographiques, coupant la surface de la terre sur un demi-cercle dont le centre est le centre de la Terre, l'arc allant d'un pôle à l'autre. Un tel demi-cercle est appelé méridien.

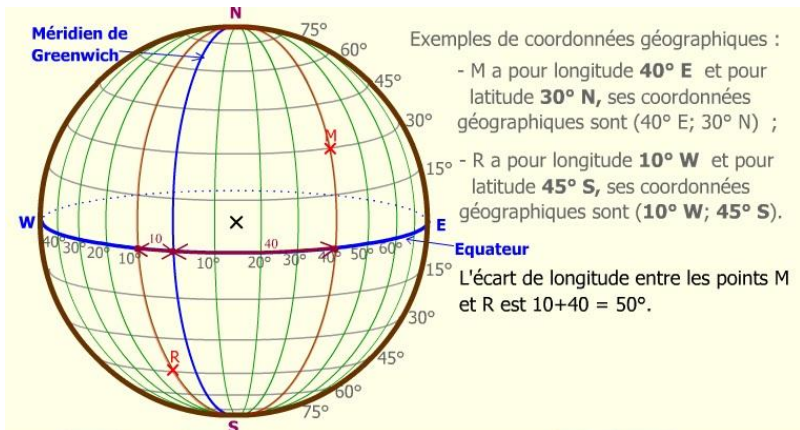
À la différence de la *latitude* (position nord ou sud) qui bénéficie de l'équateur et des pôles comme références, aucune référence naturelle n'existe pour la *longitude*.

La longitude est donc une mesure angulaire sur 360° par rapport au méridien de *Greenwich*, avec une étendue de 180° ouest à 180° est.

En combinant les deux angles, la position à la surface de la Terre peut être spécifiée.



Exemple :



I.2 REPÈRE DE TEMPS: RÉFÉRENTIEL

La description du mouvement d'un point matériel exige de connaître sa position dans l'espace **à tout instant**. Pour cela, en plus d'un *repère d'espace*, il faut définir une *échelle de temps* (deux passages consécutifs du Soleil au zénith...) à l'aide d'une **horloge**.

Un repère d'espace-temps qui associe une échelle de temps (une horloge) à un repère d'espace est appelé **référentiel**.

Ainsi un point est fixe par rapport à un référentiel si ses coordonnées dans ce référentiel ($x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$) sont constantes au cours du temps ; dans le cas contraire il est en mouvement.

II. TRAJECTOIRE VITESSE ET ACCÉLÉRATION D'UN MOBILE

II.1 TRAJECTOIRE D'UN MOBILE

La courbe représentant l'ensemble des positions $M(t)$ du mobile définit sa **trajectoire**. La trajectoire d'un point mobile **dépend du référentiel choisi**.

Exemple: Un objet tombant suivant une verticale (pour un observateur) dans un train décrit une parabole pour un observateur placé sur le bord de la voie.

L'**équation de la trajectoire** d'un point dans un repère donné est une relation entre les coordonnées de ce point **indépendante du temps**: $f(x, y, z) = 0$.

Exemple : Si les coordonnées d'un mobile ponctuel sont :

$$x = r \cos(\omega t) \quad y = r \sin(\omega t) \quad z = 0$$

ω étant la vitesse angulaire ($\theta = \omega t$) exprimée en *rad/s* (ou *tour/min*).

Alors, pendant une période $T = 2\pi/\omega$, la **trajectoire** du mobile est un **cercle** d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ de centre **O**, de rayon **r**, situé dans le plan xOy .

II.2 VITESSE DANS UN RÉFÉRENTIEL "R"

La **vitesse** d'un point mobile **M** dans un référentiel **R** est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\vec{OM}$ dans le référentiel **R** choisi:

$$\vec{V} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R$$

II.2.1 Vitesse en coordonnées cartésiennes

Nous avons : $\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ Alors : $\vec{V} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$

Puisque $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des **vecteurs unitaires constants** (leurs **module** et leur **sens** sont constants en fonction du temps) alors, leurs dérivées par rapport au temps sont nulles. Dans la suite du cours, on représentera les dérivées temporelles (dérivées

par rapport au temps) $\frac{dx}{dt}$ par $\dot{x}$.

$$\text{Ainsi: } \vec{V} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} \Leftrightarrow \dot{x} = V_x \quad \dot{y} = V_y \quad \dot{z} = V_z$$

II.2.2 Vitesse en coordonnées polaires

Puisque : $\vec{OM} = r \vec{e}_r$

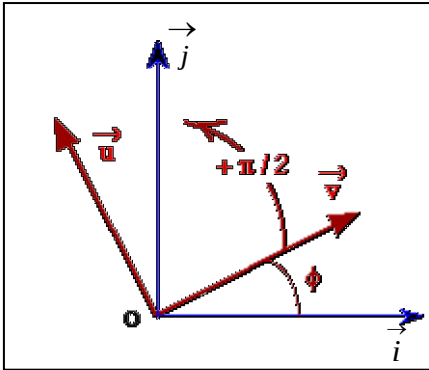
$$\text{alors: } \vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(r \vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt} (\vec{e}_r) + r \frac{d(\vec{e}_r)}{dt}$$

$$\text{Or : } \frac{d(\vec{e}_r)}{dt} = \frac{d(\vec{e}_r)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{donc : } \vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\text{ou encore : } \vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\theta \quad \text{soit : } \vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta$$

où : $\vec{V}_r$ et $\vec{V}_\theta$ sont les vitesses **radiale** et **orthoradiale** respectivement.

Rappel : dérivée d'un vecteur unitaire par rapport au temps :



Soit un vecteur unitaire $\vec{V}$ tel que :

$$\vec{V} = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}$$

Dans ce cas :

$$\frac{d(\vec{V})}{d\phi} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\vec{V})}{d\phi} = \vec{u} \quad \text{donc : } \frac{d(\vec{V})}{d\phi} \perp \vec{V}$$

de la même manière :

$$\frac{d(\vec{u})}{d\phi} = -\vec{V} \Rightarrow \frac{d(\vec{u})}{d\phi} \perp \vec{u}$$

donc :

$$\frac{d(\vec{V})}{dt} = \frac{d(\vec{V})}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \frac{d(\vec{V})}{d\phi} = \dot{\phi} \vec{u} \quad (\text{donc : } \frac{d(\vec{V})}{dt} \perp \vec{V})$$

Ainsi, la dérivée d'un vecteur unitaire $\vec{V}$ par rapport à un angle ϕ est un vecteur unitaire $\vec{u}$ déduit de $\vec{V}$ par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens des ϕ croissants.

II.2.3 Vitesse en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques le vecteur $\vec{OM}$ s'écrit : $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{k}$

$$\text{alors : } \vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(r \vec{e}_r + z \vec{k})}{dt} = \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r) + z \vec{k} = \dot{r} \vec{e}_r + r \frac{d(\vec{e}_r)}{dt} + z \vec{k}$$

$$\text{Or : } \frac{d(\vec{e}_r)}{dt} = \frac{d(\vec{e}_r)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\text{ainsi : } \vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + z \vec{k}$$

$$\text{Ou encore : } \vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{k}$$

II.3 ACCÉLÉRATION DANS UN RÉFÉRENTIEL "R"

L'accélération d'un point mobile M dans un référentiel R est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ dans le référentiel R choisi :

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_R$$

II.3.1 Accélération en coordonnées cartésiennes

Puisque : $\vec{V} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}$ alors : $\vec{a} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}$

II.3.2 Accélération en coordonnées cylindriques

Nous avons : $\vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{k}$ alors : $\vec{a} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{k})$

En dérivant successivement tous les termes par rapport au temps et en tenant

compte du fait que : $\frac{d(\vec{e}_r)}{dt} = \frac{d(\vec{e}_r)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $\frac{d(\vec{e}_\theta)}{dt} = \frac{d(\vec{e}_\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$

on obtient : $\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{k}$

II.4 ÉTUDE DE MOUVEMENTS USUELS

II.4.1 Le mouvement rectiligne

C'est un mouvement où la trajectoire est une droite. La vitesse et l'accélération sont portées par la droite. Si par exemple la droite est confondue avec

l'axe $\vec{Ox}$ de vecteur unitaire $\vec{i}$ alors :

$$\vec{OM} = x \vec{i}, \quad \vec{V} = V_x \vec{i} = \dot{x} \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{a} = a_x \vec{i} = \ddot{x} \vec{i}.$$

$x(t)$ représente l'abscisse du point M à l'instant t .

II.4.1.1 Le mouvement rectiligne uniforme

C'est un mouvement rectiligne pour lequel **la vitesse est constante** :

$$\vec{V} = Cte = v_0 \quad (\text{vitesse à } t=0)$$

Soit : $a = 0$ et $x(t) = v_0 t + x_0$

II.4.1.2 Le mouvement rectiligne uniformément varié

C'est un mouvement pour lequel **l'accélération est constante** : $a = Cte = a_0$

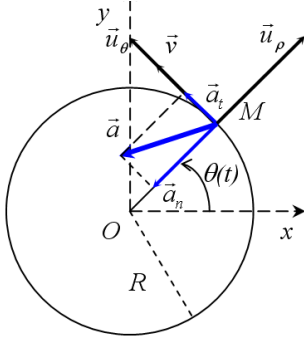
Donc : $V = a_0 t + v_0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$

Remarques :

- Par élimination de t il vient : $v^2 - v_0^2 = 2a_0(x - x_0)$

- Le mouvement est accéléré si $a_0 \cdot \vec{V} > 0$ c'est à dire si $\vec{a}$ et $\vec{V}$ sont de même sens. Le mouvement est retardé dans le cas contraire.

II.4.2 Le mouvement circulaire



C'est un mouvement où la trajectoire du mobile M est un *cercle* (de rayon R).

Dans ce cas : $\vec{OM} = R \vec{e}_r$

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}(R \vec{e}_r) = \frac{d(R)}{dt} \vec{e}_r + R \frac{d(\vec{e}_r)}{dt} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

soit : $\vec{V} = R \omega \vec{e}_\theta$

avec: $\omega = \dot{\theta}$ vitesse angulaire

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(R \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = R \frac{d(\dot{\theta})}{dt} \vec{e}_\theta + R \dot{\theta} \frac{d(\vec{e}_\theta)}{dt} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = -a_n \vec{e}_r + a_t \vec{e}_\theta$$

$a_n = -R \dot{\theta}^2$: Accélération normale (ou radiale) orientée suivant $-\vec{e}_r$.

$a_t = R \ddot{\theta}$: Accélération tangentielle orientée suivant $\vec{e}_\theta$.

II.4.2.1 Cas du mouvement circulaire uniforme

Dans ce cas nous avons :

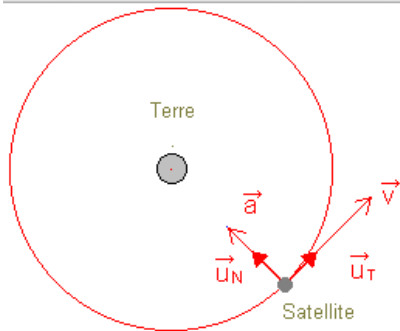
$$\omega = \dot{\theta} = Cte = \omega_0$$

$$\vec{V} = R \omega \vec{e}_\theta = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\|\vec{V}\| = R \omega_0 = Cte$$

$$\vec{a} = -R \omega_0^2 \vec{e}_r = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$

$$\|\vec{a}\| = R \omega_0^2 = Cte$$



ou bien :

$$\|\vec{a}\| = \frac{V^2}{R}$$

L'accélération est *centripète* (dirigée vers le centre) et *constante*.

CHAPITRE 2: DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

Le mouvement d'un point matériel est la conséquence de ses interactions avec les corps qui l'entourent. Pour décrire ces interactions on fait appel au concept de *force*. La dynamique est l'étude des relations entre ces forces et le mouvement.

I. QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Une particule de masse m , animée d'une vitesse $\mathbf{V}$ par rapport à un référentiel R , possède dans R une *quantité de mouvement*, notée $\mathbf{p}$ telle que :

$$\vec{p} = m\vec{V} \quad \text{unité : } \text{Kg.m.s}^{-1}$$

II. LE PRINCIPE D'INERTIE

II.1 SYSTÈME ISOLÉ ET SYSTÈME PSEUDO-ISOLÉ

- Un système est isolé s'il n'est soumis à aucune action extérieure.
- Un système est dit pseudo-isolé s'il subit des actions extérieures qui se compensent de telle manière que : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$

II.2 PRINCIPE D'INERTIE (1^{ère} LOI DE NEWTON)

Enoncé :

Un point matériel est mécaniquement isolé si:

- Lorsqu'il est au repos, il se maintient dans l'état de repos.
- Lorsqu'il en mouvement, il est en translation rectiligne et uniforme.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \text{système isolé} \\ \text{ou} \\ \text{pseudo-isolé} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \vec{Cte} \\ (\vec{p} = \vec{Cte}) \end{cases}$$

III. LE RÉFÉRENTIEL GALILÉEN

II.1 DÉFINITION

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié

Conséquences :

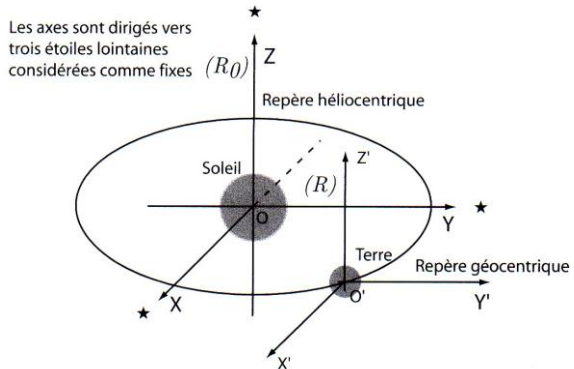
- Une particule mécaniquement isolée, au repos dans un repère galiléen, se maintient dans l'état de repos.
- Une particule mécaniquement isolée, en mouvement dans un repère galiléen, est en translation rectiligne et uniforme.

II.2 EXEMPLES DE RÉFÉRENTIELS GALILÉENS

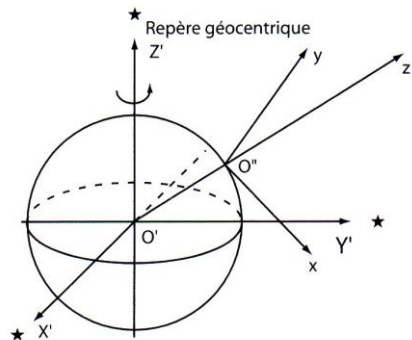
1. Le référentiel de *Copernic* constitué d'un repère d'espace dont l'origine est confondue avec le centre d'inertie du système solaire et de trois axes dirigés vers trois étoiles éloignées (considérées comme fixes) et d'un repère de temps.
 - Le référentiel de *Copernic* est considéré comme *référentiel galiléen de base* (référentiel *absolu*).

- Tout référentiel en *translation rectiligne uniforme* par rapport au référentiel de Copernic (référentiel galiléen de base) est un référentiel *galiléen*.

2. Le référentiel *géocentrique* dont l'origine est confondue avec le centre de la terre et dont les trois axes dirigés vers trois étoiles lointaines est en *translation elliptique* par rapport au référentiel de Copernic et peut être assimilé à un référentiel *galiléen*.



3. Le référentiel lié à la terre (à une salle d'expériences sur terre) *n'est pas rigoureusement galiléen* à cause de la rotation de la terre autour de l'axe des pôles. Il sera tout de même considéré comme galiléen pour des applications pratiques qui ne réclament pas une très grande précision.



III. LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (PFD)

III.1 DANS UN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN (R)

Dans un référentiel galiléen R , la somme des forces « réelles » $\sum \vec{F}$ qui agissent sur le point matériel est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement:

$$\sum \vec{F} = \left(\frac{d \vec{p}}{dt} \right)_R = m \vec{a}_a(M)$$

Cas particulier: Si la particule est *isolée* ($\sum \vec{F} = 0$) alors :

$$\vec{a} = \frac{d \vec{V}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{V} = Cte$$

donc, la quantité de mouvement d'une particule isolée se conserve (=Cte). Nous retrouvons ainsi la définition d'un référentiel galiléen.

III.2 DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN (R')

Compte tenu de la relation ci-dessus et de la loi de composition des accélérations, on peut écrire:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_a(M) = m \left[\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \right] \Rightarrow \sum \vec{F} - m \vec{a}_e - m \vec{a}_c = m \vec{a}_r$$

soit :

$$\sum \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m \vec{a}_r$$

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e = \text{Force d'inertie d'entraînement.}$$

$$\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_c = \text{Force d'inertie de Coriolis (ou complémentaire).}$$

Ainsi, dans un référentiel **non galiléen** la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces « réelles » $\sum \vec{F}$ et des forces d'inertie $\vec{F}_{ie}$ et $\vec{F}_{ic}$ qui agissent sur le point matériel.

III.2.1 Cas où le mouvement d'entraînement est une translation

C'est le cas par exemple d'une voiture en train d'accélérer (ou de freiner). Dans ce cas:

- l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c = 2 \vec{\omega} (R_1 / R) \wedge \vec{V}_r(M) = 0$ puisque $\vec{\omega} (R_1 / R) = 0$.
- l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e(R_1 / R) = \left(\frac{d^2 \vec{OO}_1}{dt^2} \right)_R$ = l'accélération de la voiture

Ainsi: la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic}$ est nulle de sorte qu'il ne reste que la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e$ qui est de sens opposé à celui de l'accélération d'entraînement et qui a tendance à *coller les passagers au siège* si la voiture *accélère* (et au contraire à les projeter en avant si la voiture freine).

IV. TRAVAIL, ÉNERGIE CINÉTIQUE ET THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

IV.1 LE TRAVAIL D'UNE FORCE

Le *travail élémentaire* effectué par la résultante $\vec{F}$ des forces agissant sur une particule mobile, dont le point d'application subit un déplacement $\vec{dl}$ est par définition le produit scalaire :

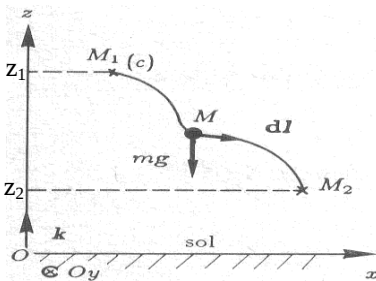
$$\delta W = \vec{F} \bullet \vec{dl}$$

Le travail total produit par la résultante des forces lorsque la particule se déplace d'un M_1 (à t_1) à un point M_2 (à t_2) est égal à la somme des travaux élémentaires le long de la courbe:

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{V} dt$$

L'unité de travail est le *Joule (J)*. Il est égal au travail effectué par une force constante de 1 Newton (1 N) suivant une distance de 1 mètre (1 m).

Exemple : Travail de la force de pesanteur



Evaluons le travail du poids:

$\vec{P} = m \vec{g}$ ($\vec{g} = -g \vec{k}$) lorsqu'une particule M de masse m décrit une trajectoire quelconque (ci-contre) entre M_1 (cote z_1) et M_2 (cote z_2). Nous avons:

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{P} \cdot d\vec{l} = \int_{t_1}^{t_2} -mg \vec{k} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{or: } d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \Rightarrow \vec{k} \cdot d\vec{l} = dz$$

Par conséquent :

$$W = mg(z_1 - z_2)$$

IV.2. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Dans un référentiel galiléen, le principe fondamental de la dynamique appliqué à un point de masse m soumis à la force $\vec{F}$ (résultante des forces) s'écrit : $\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$.

Le travail élémentaire au cours d'un déplacement $d\vec{l}$ ($d\vec{l} = \vec{V} dt$) s'écrit alors :

$$\delta W = m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} dt = d \left(\frac{1}{2} m \vec{V}^2 \right) = dE_c$$

Avec : $E_c = \frac{1}{2} m V^2$ = énergie cinétique de la particule de masse m animée de la vitesse V .

On en déduit le travail total, W , effectué entre un instant initial t_1 (caractérisé par une vitesse V_1 de la particule) et un instant final t_2 (associé à la vitesse V_2) est :

$$W = (E_c)_2 - (E_c)_1 = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2$$

Énoncé du Théorème de l'énergie cinétique :

Le travail de la résultante des forces appliquées à une particule, dans un référentiel galiléen, entre les instants t_1 et t_2 est égal à la variation de l'énergie cinétique de la particule entre ces instants.

Remarques:

- Si le référentiel n'est pas galiléen, la résultante des forces doit inclure les forces d'inertie.
- A un travail moteur ($W > 0$, soit $E_{C2} > E_{C1}$) de la force correspond un accroissement de la vitesse, et à un travail résistant ($W < 0$, soit $E_{C2} < E_{C1}$) correspond une diminution de la vitesse de la particule.
- Lorsque la résultante des forces, $\vec{F}$, appliquées à la particule est orthogonale au déplacement ($\vec{F} \bullet \vec{dl} = 0$) alors, son énergie cinétique reste constante.

V. FORCES CONSERVATIVES, ÉNERGIE POTENTIELLE ET ÉNERGIE MÉCANIQUE

Une force est dite conservative lorsque le travail effectué par cette force est indépendant du chemin suivi entre le point de départ et le point d'arrivée.

Dans ce cas, la force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p définie par :

$$E_p = - \int \vec{F} \bullet \vec{dl} \quad \text{ou bien} \quad dE_p = - \vec{F} \bullet \vec{dl}$$

Remarques:

- L'énergie potentielle est toujours définie à une constante arbitraire près. Seules les différences d'énergie potentielle ont une signification physique.
- L'énergie potentielle dépend du référentiel choisi.

V.1 EXEMPLES DE FORCES CONSERVATIVES :

1) Le poids :

Le poids $\vec{P}$ d'une masse m est le vecteur $m \vec{g}$ dirigé vers le bas. Choisissons l'axe Oz dirigé vers le haut.

Les composantes du poids sont alors :

$$P_x = 0 \quad P_y = 0 \quad P_z = -mg$$

et le vecteur déplacement $\vec{dl}$ s'écrit dans la base cartésienne:

$$\vec{dl} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$\text{Ainsi: } dE_p = - \vec{P} \bullet \vec{dl} = -P_z dz = -(-mg dz) \Rightarrow E_p = \int dE_p = mgz + Cte$$

D'où l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_p(z) = mgz + Cte$$

2) La force de rappel du ressort : Soit un ressort disposé suivant un axe Ox . Tirons sur une extrémité du ressort (l'autre étant fixe) en l'allongeant de x ($x=l-l_0$: variation de longueur du ressort). Il exerce alors sur l'opérateur une *force de rappel*:

$\vec{F}_x = -k x \vec{i}$ la constante k est appelée *raideur* du ressort. Ainsi :

$$E_p = -\int \vec{F} \cdot d\vec{l} \Rightarrow E_p = -\int \vec{F}_x \cdot d\vec{x} = \int k x \vec{i} \cdot d\vec{x} = \int k x dx \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k x^2 + Cte$$

D'où l'expression de *l'énergie potentielle élastique*: $E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 + Cte$.

V.2. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES FORCES CONSERVATIVES:

Le travail élémentaire d'une force est par définition égal à : $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$

Or dans le cas où la force $\vec{F}$ est conservative, on a: $\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_p$

Ainsi :

$$\delta W = -dE_p$$

Par intégration sur un trajet allant d'un point de départ 1 vers un point d'arrivée 2, on obtient:

$$W = E_{p1} - E_{p2}$$

On retrouve le fait que le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi pour aller d'un point 1 à un point 2. Il ne dépend que du point du départ (1) et du point d'arrivée (2).

V.3 ÉNERGIE MÉCANIQUE D'UNE FORCE CONSERVATIVE

Par définition, l'énergie mécanique totale d'une particule est la somme de son énergie cinétique, E_c , et de son énergie potentielle, E_p :

$$E_m = E_c + E_p$$

Or pour une force conservative nous avons montré que :

$$W = E_{c2} - E_{c1} = E_{p1} - E_{p2}$$

Donc pour une telle force on peut écrire:

$$W = E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2} \Leftrightarrow E_{m1} = E_{m2} = Cte$$

Conclusion: L'énergie mécanique d'une particule soumise à une force conservative se conserve (reste constante) au cours du mouvement.

VI. FORCES NON CONSERVATIVES (OU DISSIPATIVES)

Une force est dite non conservative (ou dissipative) si le travail de cette force entre deux points A et B de l'espace dépend du chemin suivi.

Exemple : les forces de frottements sont des forces non conservatrices.

Soit une particule M de masse m , animée d'un mouvement sous l'action de diverses forces (conservatives et non conservatives)

L'application du théorème de l'énergie cinétique au cours d'un déplacement de la particule conduit à :

$$W = W_c + W_d = E_{c2} - E_{c1}$$

avec : W_c = travail associé aux forces conservatives

W_d = travail associé aux forces dissipatives

Puisque : $W_c = Ep_1 - Ep_2$ alors: $W_d = (Ec_2 + Ep_2) - (Ec_1 + Ep_1)$.

Soit: $W_d = (Em_2 - Em_1)$

Ainsi: la perte de l'énergie mécanique est mesurée par le travail des forces dissipatives.

Remarque :

En présence de forces de frottement (forces dissipatives), une partie de l'énergie mécanique est fournie au milieu extérieur sous forme de chaleur. Il se produit donc une transformation de l'énergie mécanique en énergie thermique (ou *chaleur*: *notion traitée en cours de thermodynamique*).